

Kontrol Optimal Dinamika Miskonsepsi dengan Intervensi Konseptual Bergantung Waktu

Optimal Control of Misconception Dynamics with Time-Dependent Conceptual Intervention

Nur Rezky Ramadhan & Danial

Universitas Negeri Makassar

danial@unm.ac.id

Submitted:	Revised:	Accepted:	Published:
Sep 1, 2026	Sep 29, 2026	Oct 10, 2026	Oct 15, 2026

Abstract

This study aimed to formulate and solve an optimal control problem for a nonlinear differential equation model to minimize the cumulative burden of misconceptions and the quadratic cost of intervention. The state variables represent the proportions of learners with insufficient understanding, misconceptions, and conceptual understanding. The time-dependent control regulated the transition from misconceptions to conceptual understanding, with an upper intensity bound of 0.30 over a horizon of 100 time units. The necessary conditions for optimality were derived using Pontryagin's minimum principle. The numerical solution was obtained by reducing the model from three to two dimensions and applying the forward-backward sweep method based on fourth-order Runge–Kutta integration with damping. For the assumed parameter values $\alpha = 0.20$, $\beta = 0.75$, $\gamma = 0.15$, $\delta = 0.10$, and baseline weights $A = B = 1$, the optimal control yielded an objective value of 2.7064, lower than those obtained under the no-control scenario and constant controls of 0.10 and 0.20. The cumulative burden of misconceptions was 1.5492, with a control energy of 2.3143. Compared with the constant control of 0.20, the optimal strategy reduced the cumulative burden of misconceptions by 26.1% and used 42.1% less energy. The control intensity remained near its upper bound until time 9.50, then gradually decreased to zero at the terminal time. Numerical verification yielded a maximum mass conservation error of 2.55×10^{-15} , a state difference of 2.00×10^{-15} between the two- and three-dimensional models, and a projection residual of 8.66×10^{-9} . Sensitivity analysis at $B = 0.5, 1, 2$, and 5 showed a consistent trade-off between intervention cost and the persistence of misconceptions. This study provides a mathematical framework for examining time-dependent conceptual interventions. Because all parameters and cost weights are assumed, the findings are limited to the

model's mathematical implications and cannot be treated as empirical recommendations.

Keywords: Misconception Dynamics; Optimal Control; Nonlinear Differential Equations; Pontryagin's Minimum Principle; Forward-Backward Sweep

Abstrak: Penelitian ini bertujuan merumuskan dan menyelesaikan masalah kontrol optimal pada model persamaan diferensial nonlinier untuk meminimumkan beban miskonsepsi kumulatif dan biaya kuadratik intervensi. Variabel keadaan merepresentasikan proporsi pembelajar dengan pemahaman belum memadai, miskonsepsi, dan pemahaman konseptual. Kontrol bergantung waktu mengatur transisi dari miskonsepsi menuju pemahaman konseptual dengan batas intensitas 0,30 pada horizon 100 satuan waktu. Kondisi perlu optimalitas diturunkan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Penyelesaian numerik dilakukan melalui reduksi model dari tiga menjadi dua dimensi dan metode *forward-backward sweep* berbasis Runge–Kutta orde empat dengan peredaman. Pada parameter asumsi $\alpha = 0,20$, $\beta = 0,75$, $\gamma = 0,15$, $\delta = 0,10$, dan bobot dasar $A = B = 1$, kontrol optimal menghasilkan nilai objektif 2,7064, lebih rendah daripada skenario tanpa kontrol maupun kontrol konstan 0,10 dan 0,20. Beban miskonsepsi kumulatif mencapai 1,5492 dengan energi kontrol sebesar 2,3143. Dibandingkan kontrol konstan 0,20, strategi optimal menurunkan beban miskonsepsi kumulatif sebesar 26,1% dan menggunakan energi 42,1% lebih rendah. Intensitas kontrol berada dekat batas maksimum hingga waktu 9,50, kemudian menurun secara bertahap hingga mencapai nol pada waktu terminal. Verifikasi numerik menghasilkan galat konservasi massa maksimum $2,55 \times 10^{-15}$, perbedaan keadaan antara model dua dan tiga dimensi sebesar $2,00 \times 10^{-15}$, serta residual proyeksi $8,66 \times 10^{-9}$. Analisis sensitivitas pada $B = 0,5; 1; 2; \text{ dan } 5$ menunjukkan kompromi yang konsisten antara biaya intervensi dan persistensi miskonsepsi. Penelitian ini menyediakan kerangka matematis untuk mengkaji intervensi konseptual bergantung waktu. Karena seluruh parameter dan bobot biaya merupakan asumsi, hasil penelitian terbatas pada implikasi matematis model dan tidak dapat diperlakukan sebagai rekomendasi empiris.

Kata Kunci: Dinamika Miskonsepsi; Kontrol Optimal; Persamaan Diferensial Nonlinier; Prinsip Minimum Pontryagin; *Forward-Backward Sweep*

PENDAHULUAN

Miskonsepsi merupakan struktur pengetahuan yang relatif konsisten, bukan sekadar kesalahan hitung sesaat. Dalam pembelajaran matematika, miskonsepsi dapat muncul ketika skema awal digunakan di luar domain yang sesuai atau ketika makna formal baru diasimilasikan tanpa restrukturisasi pengetahuan. Perspektif perubahan konseptual menekankan bahwa pembelajaran perlu mengubah hubungan antaride, bukan hanya mengganti jawaban yang salah (Vosniadou & Verschaffel, 2004). Kajian sistematis di Indonesia juga menunjukkan bahwa generalisasi berlebihan, klasifikasi keliru, dan penggunaan definisi yang tidak tepat merupakan bentuk miskonsepsi yang berulang (Ridho

& Juandi, 2023). Christou (2022), misalnya, memperlihatkan bagaimana keyakinan bahwa perkalian selalu memperbesar bilangan dapat bertahan ketika konsep bilangan diperluas.

Perubahan pemahaman dapat direpresentasikan sebagai perpindahan antarkeadaan yang berlangsung terhadap waktu. Tenison dan Anderson (2016) mengidentifikasi fase perolehan keterampilan melalui model keadaan tersembunyi, Li et al. (2016) menggunakan latent transition analysis untuk menilai perubahan keterampilan kognitif, dan Rinne et al. (2017) memodelkan perkembangan strategi perbandingan pecahan. Ketiga pendekatan tersebut tidak menggunakan persamaan diferensial, tetapi mendukung gagasan bahwa kondisi konseptual dapat dipandang sebagai keadaan dinamis dengan peluang atau laju transisi tertentu.

Persamaan diferensial biasa menyediakan kerangka kontinu untuk menelaah bagaimana mekanisme pembentukan pemahaman, interaksi, koreksi, dan pelupaan memengaruhi komposisi keadaan secara kolektif. Pemodelan semacam ini harus diperlakukan sebagai abstraksi mekanistik yang bergantung pada asumsi, bukan sebagai salinan langsung proses kognitif individu (Banerjee, 2021; Bretti, 2021). Dalam konteks pendidikan matematika, pemodelan telah digunakan untuk mengorganisasi aktivitas belajar dan representasi (Lozada et al., 2023; Suh et al., 2021), sedangkan telaah Vitoria et al. (2021) menunjukkan ruang yang masih luas bagi pengembangan penelitian pemodelan pendidikan di Indonesia.

Beberapa studi telah membawa fenomena pendidikan ke dalam sistem dinamik kontinu. Mutiawati et al. (2022) mengembangkan model perilaku belajar yang melibatkan motivasi dan interaksi sosial. Castaldi dan Mimmo (2024) memodelkan interaksi mahasiswa dengan kurikulum universitas. El Bhih et al. (2024) menggabungkan model kompartemen, analisis sensitivitas, dan kontrol optimal untuk kesadaran mahasiswa dalam matematika. Literatur ini memperlihatkan bahwa metode ODE dan kontrol optimal dapat digunakan dalam pendidikan selama kategori keadaan, mekanisme transisi, dan batas interpretasi didefinisikan secara eksplisit.

Model dasar penelitian ini membagi populasi pembelajar menjadi tiga proporsi: belum memiliki pemahaman konseptual memadai, mengalami miskonsepsi, dan memiliki pemahaman konseptual. Kajian sebelumnya dengan intervensi konstan menunjukkan bahwa laju koreksi tambahan dapat mengurangi persistensi miskonsepsi. Intervensi konstan, bagaimanapun, tidak menjawab pertanyaan tentang kapan intensitas tinggi perlu

dipertahankan dan kapan intervensi dapat dikurangi. Mempertahankan intervensi tinggi sepanjang horizon memang dapat menekan miskonsepsi terminal, tetapi menimbulkan biaya yang tidak diperhitungkan oleh analisis kestabilan saja.

Penelitian ini merumuskan intervensi konseptual sebagai kontrol terbatas yang bergantung waktu. Tujuannya adalah menentukan profil kontrol yang meminimumkan kombinasi beban miskonsepsi kumulatif dan biaya kuadratik intervensi. Kontribusi penelitian meliputi penurunan sistem optimalitas dengan Prinsip Minimum Pontryagin, reduksi analitik dari tiga ke dua dimensi, penyelesaian numerik dengan forward-backward sweep dan Runge-Kutta orde empat, verifikasi independen terhadap formulasi tiga dimensi, perbandingan dengan tiga kebijakan konstan, serta analisis sensitivitas terhadap bobot biaya kontrol.

Penelitian ditempatkan dalam Matematika Terapan, khususnya sistem dinamik, persamaan diferensial biasa, dan kontrol optimal. Tidak ada peserta didik, perlakuan kelas, atau data hasil belajar yang digunakan. Semua parameter, batas kontrol, kondisi awal, horizon, dan bobot biaya merupakan asumsi komputasional. Oleh karena itu, hasil yang diperoleh adalah implikasi matematis dari struktur model dan tidak boleh dibaca sebagai rekomendasi empiris mengenai intensitas atau durasi intervensi pembelajaran.

METODE

1 Desain Pemodelan dan Asumsi

Penelitian menggunakan desain analitik-komputasional. Variabel $u(t)$, $m(t)$, dan $c(t)$ masing-masing menyatakan proporsi pembelajar yang belum memiliki pemahaman konseptual memadai, mengalami miskonsepsi, dan memiliki pemahaman konseptual. Populasi dimodelkan tertutup dan dinormalisasi. Interaksi antara kelompok u dan m membentuk miskonsepsi dengan laju βum ; pembentukan pemahaman langsung berlangsung dengan laju αu ; koreksi dasar berlangsung dengan laju γm ; kontrol $v(t)$ menambah laju perpindahan dari m menuju c ; dan pelemahan pemahaman mengembalikan c menuju u dengan laju δc .

$\begin{cases} \dot{u} &= \delta c - \alpha u - \beta um \\ \dot{m} &= \beta um - \gamma m - v(t)m \\ \dot{c} &= \alpha u + \gamma m + v(t)m - \delta c \end{cases}$	(1)
$u + m + c = 1, \quad u, m, c \geq 0$	(2)

Penjumlahan ketiga persamaan pada (1) menghasilkan turunan jumlah keadaan sama dengan nol. Dengan kondisi awal yang berjumlah satu, simpleks proporsi tetap invarian. Medan vektor pada setiap sisi simpleks mengarah ke dalam atau menyinggung batas, sehingga solusi yang berawal nonnegatif tetap nonnegatif.

Tabel 1. Variabel, parameter, dan nilai asumsi model

Simbol	Definisi	Nilai dasar	Satuan
$u(t)$	Proporsi tanpa pemahaman konseptual memadai	0,50 pada $t=0$	proporsi
$m(t)$	Proporsi yang mengalami miskonsepsi	0,30 pada $t=0$	proporsi
$c(t)$	Proporsi dengan pemahaman konseptual	0,20 pada $t=0$	proporsi
α	Laju pembentukan pemahaman dari u ke c	0,20	waktu ⁻¹
β	Koefisien pembentukan miskonsepsi melalui interaksi u dan m	0,75	waktu ⁻¹
γ	Laju koreksi dasar dari m ke c	0,15	waktu ⁻¹
δ	Laju pelemahan pemahaman dari c ke u	0,10	waktu ⁻¹
$v(t)$	Intensitas intervensi konseptual bergantung waktu	0–0,30	waktu ⁻¹
T	Horizon optimisasi	100	waktu
A, B	Bobot beban miskonsepsi dan biaya kontrol	1, 1	tanpa satuan

Sumber: asumsi model penelitian.

2 Formulasi Masalah Kontrol Optimal

Kontrol dicari pada kelas fungsi terukur esensial terbatas. Fungsi objektif menjumlahkan beban miskonsepsi sepanjang horizon dan biaya kuadratik intensitas kontrol. Bentuk kuadratik membuat intervensi besar semakin mahal, sedangkan bobot A dan B mengatur kepentingan relatif kedua komponen.

$$J(v) = \int_0^T \left[Am(t) + \frac{B}{2} v(t)^2 \right] dt \quad (3)$$

$$\mathcal{V} = \{v \in L^\infty(0, T) \mid 0 \leq v \leq v_{max}\} \quad (4)$$

Pada simulasi dasar digunakan $A=B=1$, $T=100$, dan batas atas kontrol 0,30. Karena himpunan kontrol kompak dan konveks, ruas kanan sistem kontinu serta Lipschitz lokal pada simpleks, dan integran konveks terhadap kontrol, masalah memenuhi kondisi standar yang mendukung keberadaan kontrol optimal (Fleming & Rishel, 1975; Lenhart & Workman, 2007).

3 Kondisi Perlu Pontryagin

Prinsip Minimum Pontryagin mengubah masalah optimisasi menjadi sistem batas dua titik yang memuat persamaan keadaan, persamaan adjoint, kondisi transversal, dan kondisi peminimuman Hamiltonian (Pontryagin et al., 1962; Kirk, 2004). Hamiltonian untuk sistem tiga dimensi dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = & Am + \frac{B}{2}v^2 \\ & + \lambda_1(\delta c - \alpha u - \beta um) \\ & + \lambda_2(\beta um - \gamma m - vm) \\ & + \lambda_3(\alpha u + \gamma m + vm - \delta c)\end{aligned}\quad (5)$$

Persamaan adjoint diperoleh dari negatif turunan parsial Hamiltonian terhadap setiap keadaan.

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{dt} = \alpha(\lambda_1 - \lambda_3) \\ \quad + \beta m(\lambda_1 - \lambda_2) \\ \frac{d\lambda_2}{dt} = -A + \beta u(\lambda_1 - \lambda_2) \\ \quad + (\gamma + v)(\lambda_2 - \lambda_3) \\ \frac{d\lambda_3}{dt} = \delta(\lambda_3 - \lambda_1) \end{cases}\quad (6)$$

Karena tidak ada biaya terminal dan keadaan terminal bebas, kondisi transversal adalah

$$\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = 0 \quad (7)$$

Turunan parsial Hamiltonian terhadap kontrol menghasilkan nilai stasioner. Nilai tersebut kemudian diproyeksikan ke interval kendala kontrol, sehingga karakterisasi kontrol optimal menjadi

$$\begin{aligned}q(t) &= \frac{m(t)(\lambda_2(t) - \lambda_3(t))}{B} \\ v^*(t) &= \min\{v_{max}, \max[0, q(t)]\}\end{aligned}\quad (8)$$

4 Reduksi Dua Dimensi

Identitas konservasi pada persamaan (2) memungkinkan eliminasi variabel c . Sistem keadaan tereduksi adalah

$$\begin{cases} \dot{u} &= \delta - (\alpha + \delta)u - \delta m - \beta um \\ \dot{m} &= \beta um - (\gamma + v)m \end{cases}\quad (9)$$

Untuk menyederhanakan sistem adjoint, didefinisikan dua selisih costate

$$p_1 = \lambda_1 - \lambda_3, \quad p_2 = \lambda_2 - \lambda_3 \quad (10)$$

Substitusi definisi tersebut ke persamaan (6) menghasilkan sistem adjoint dua dimensi, dengan kedua costate tereduksi bernilai nol pada waktu terminal.

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = (\alpha + \delta)p_1 + \beta m(p_1 - p_2) \\ \frac{dp_2}{dt} = -A + \delta p_1 + \beta u(p_1 - p_2) \\ +(\gamma + v)p_2 \end{cases} \quad (11)$$

Karakterisasi kontrol pada formulasi tereduksi menjadi

$$q(t) = \frac{m(t)p_2(t)}{B} \quad (12)$$

$$v^*(t) = \min\{v_{max}, \max[0, q(t)]\}$$

Reduksi ini mempertahankan dinamika keadaan dan kondisi optimalitas, tetapi mengurangi biaya komputasi dan menyediakan pemeriksaan silang langsung terhadap formulasi tiga dimensi.

5 Skema Numerik dan Verifikasi

Sistem optimalitas diselesaikan dengan forward-backward sweep. Pada setiap iterasi, keadaan diintegrasikan maju dari kondisi awal, adjoint diintegrasikan mundur dari kondisi terminal, dan kontrol diperbarui melalui proyeksi pada persamaan (12). Pendekatan ini umum digunakan untuk sistem kontrol optimal yang diturunkan secara tidak langsung (Lenhart & Workman, 2007; McAsey et al., 2012). Integrasi maju dan mundur menggunakan skema Runge-Kutta klasik orde empat pada grid seragam dengan langkah 0,0125 (Butcher, 2016). Bentuk pembaruan satu langkahnya adalah

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (13)$$

Percobaan awal menunjukkan bahwa relaksasi 50:50 membentuk siklus dua titik pada sensitivitas $B=0,5$. Karena itu digunakan damping yang mempertahankan 90% kontrol lama dan memasukkan 10% kontrol hasil proyeksi baru.

$$v^{(k+1)} = 0,9v^{(k)} + 0,1\tilde{v}^{(k+1)} \quad (14)$$

Iterasi dihentikan ketika perubahan norma maksimum relatif kontrol kurang dari 10^{-9} . Verifikasi meliputi residual proyeksi kondisi Pontryagin, konservasi massa pada sistem tiga dimensi, kesetaraan lintasan keadaan 2D dan 3D, identitas costate tereduksi, serta pemurnian grid dari 0,025 menjadi 0,0125. Residual proyeksi didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} \Pi_{[0,v_{max}]}(x) &= \min\{v_{max}, \max[0, x]\} \\ r_{proj} &= \max_{0 \leq t \leq T} \left| v(t) - \left(\frac{m(t)p_2(t)}{B} \right) \right| \end{aligned} \quad (15)$$

Selain solusi optimal, tiga strategi pembandingan dihitung pada model dan grid yang sama: tanpa kontrol, kontrol konstan 0,10, dan kontrol konstan 0,20. Sensitivitas bobot biaya kontrol dihitung untuk $B=0,5; 1; 2; \text{ dan } 5$, sedangkan A tetap satu.

HASIL

1 Konvergensi dan Verifikasi Numerik

Untuk baseline $B=1$, forward-backward sweep konvergen setelah 173 iterasi. Residual maksimum terhadap operator proyeksi adalah $8,66 \times 10^{-9}$. Nilai tersebut seorde dengan toleransi iterasi dan menunjukkan bahwa kontrol akhir konsisten dengan karakterisasi Pontryagin pada grid yang digunakan.

Tabel 2. Ringkasan verifikasi numerik solusi optimal baseline

Pemeriksaan	Hasil	Interpretasi
Iterasi hingga konvergen	173	Perubahan relatif $<10^{-9}$
Residual proyeksi maksimum	$8,66 \times 10^{-9}$	Kondisi kontrol terpenuhi secara numerik
Galat konservasi massa 3D	$2,55 \times 10^{-15}$	Jumlah keadaan tetap satu
Selisih keadaan maksimum 2D–3D	$2,00 \times 10^{-15}$	Reduksi keadaan konsisten
Galat identitas $p_2 = \lambda_2 - \lambda_3$	$7,96 \times 10^{-13}$	Reduksi adjoint konsisten
Perubahan J setelah pemurnian grid	$<10^{-6}$	Angka stabil pada grid akhir

Sumber: hasil simulasi penulis.

Galat konservasi dan perbedaan keadaan berada dekat presisi mesin, sedangkan galat identitas costate tetap jauh di bawah toleransi pelaporan. Pemurnian grid mengubah nilai objektif kurang dari 10^{-6} . Gabungan pemeriksaan ini mengurangi kemungkinan bahwa peringkat strategi hanya merupakan artefak reduksi dimensi atau ukuran langkah.

2 Perbandingan Empat Strategi

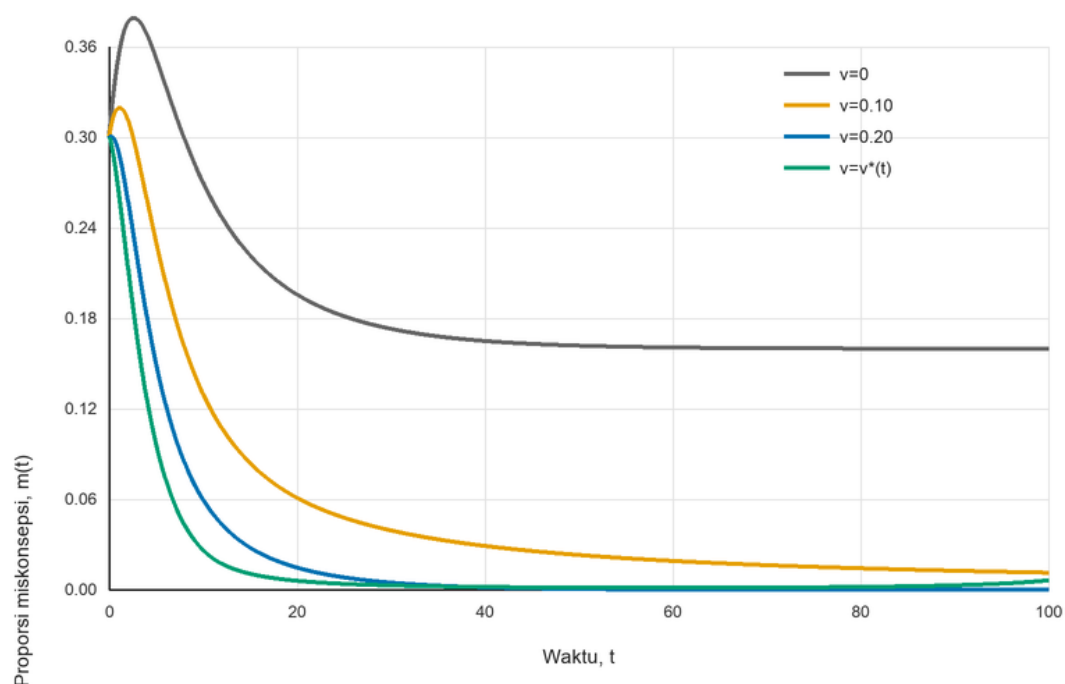
Tabel 3. Perbandingan kinerja strategi pada $A=B=1$

Strategi	Nilai objektif	Beban kumulatif	Intensitas kumulatif	Energi kontrol	m pada T
Tanpa kontrol	18,7655	18,7655	0,0000	0,0000	0,160021
Konstan 0,10	5,5695	5,0695	10,0000	1,0000	0,011468
Konstan 0,20	4,0951	2,0951	20,0000	4,0000	0,000004
Optimal $v^*(t)$	2,7064	1,5492	13,0092	2,3143	0,006371

Sumber: simulasi RK4 pada $\Delta t=0,0125$. Beban kumulatif adalah integral m ; intensitas kumulatif adalah integral v ; energi kontrol adalah integral v^2 .

Kontrol optimal memberikan nilai objektif terendah. Tanpa kontrol, miskonsepsi meningkat dari 0,30 menjadi puncak 0,379249 pada waktu 2,61 dan kemudian menetap dekat 0,160021. Kontrol konstan 0,10 menurunkan beban kumulatif secara besar, tetapi masih menghasilkan nilai objektif lebih dari dua kali baseline optimal. Kontrol konstan 0,20 hampir menghilangkan miskonsepsi pada waktu terminal, tetapi biaya mempertahankan intensitas tersebut sepanjang horizon menaikkan komponen energi.

Dibandingkan kontrol konstan 0,20, kontrol optimal menurunkan beban miskonsepsi kumulatif 26,1%. Intensitas kumulatifnya 35,0% lebih kecil dan energi kontrolnya 42,1% lebih kecil. Nilai terminal strategi optimal memang lebih tinggi daripada kontrol konstan 0,20, tetapi fungsi objektif menilai seluruh lintasan dan biaya intervensi, bukan hanya keadaan terminal. Karena itu, keadaan terminal yang paling kecil tidak identik dengan nilai objektif yang paling rendah.



Gambar 1. Trajektori miskonsepsi untuk empat strategi kontrol

Sumber: hasil simulasi penulis.

3 Kecepatan Penurunan Miskonsepsi

Tabel 4. Puncak dan waktu pencapaian ambang miskonsepsi

Strategi	Puncak m (waktu)	Di bawah 0,15	Di bawah 0,10	Di bawah 0,05	Di bawah 0,01
Tanpa kontrol	0,379249 (2,61)	Tidak tercapai	Tidak tercapai	Tidak tercapai	Tidak tercapai
Konstan 0,10	0,319572 (1,11)	8,61	12,78	24,05	Tidak tercapai
Konstan 0,20	0,300669 (0,19)	4,95	7,06	11,08	23,38
Optimal $v^*(t)$	0,300000 (0,00)	3,35	4,83	7,41	15,53

Sumber: hasil simulasi. Waktu ambang adalah waktu pertama setelah itu m tetap berada di bawah nilai ambang sampai T .

Kontrol optimal langsung membuat $m(t)$ menurun dari kondisi awal dan mencapai seluruh ambang paling cepat. Strategi konstan 0,20 masih menimbulkan kenaikan awal kecil karena pada $t=0$ laju pembentukan miskonsepsi sedikit melampaui total laju koreksi. Keunggulan kontrol optimal pada fase awal berasal dari arc jenuh yang menaikkan laju koreksi hingga batas yang diizinkan.

Pada kontrol optimal, $m(t)$ mencapai minimum 0,001501 pada waktu sekitar 59,65, lalu meningkat perlahan menjadi 0,006371 pada $T=100$. Kenaikan terminal ini merupakan konsekuensi struktur objektif tanpa penalti terminal. Kondisi transversal membuat costate nol pada T dan karakterisasi kontrol memberi $v^*(T)=0$. Intervensi yang sangat dekat dengan waktu terminal memiliki waktu yang sedikit untuk mengurangi integral beban, sehingga kontrol dilepas secara bertahap.

4 Profil Kontrol Optimal Baseline

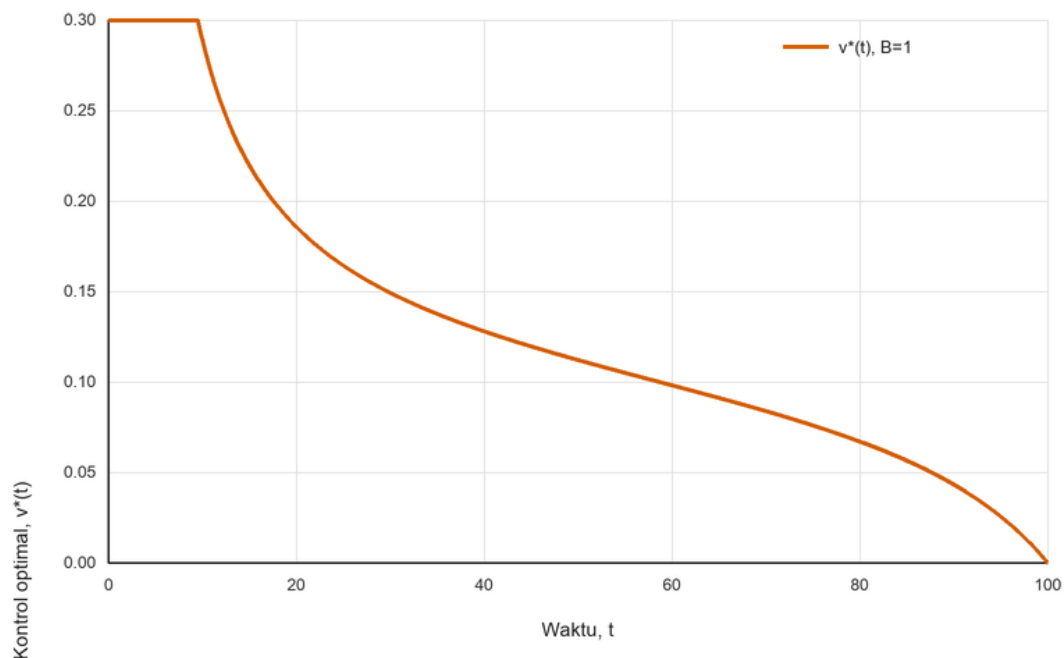
Tabel 5. Nilai terpilih profil kontrol optimal dan miskonsepsi

Waktu	Kontrol optimal	Proporsi miskonsepsi
0	0,3000	0,300000
5	0,3000	0,095303
10	0,2887	0,026146
20	0,1857	0,006062
40	0,1281	0,001987
60	0,0982	0,001501
80	0,0671	0,002029
90	0,0434	0,003086

Waktu	Kontrol optimal	Proporsi miskonsepsi
99	0,0061	0,005806
100	0,0000	0,006371

Sumber: hasil simulasi penulis.

Kontrol berada sangat dekat dengan batas maksimum sampai waktu 9,50. Sesudah itu, kontrol memasuki arc interior dan menurun secara mulus. Kontrol melewati 0,20 pada waktu 17,55, melewati 0,10 pada waktu 58,69, dan melewati 0,01 pada waktu 98,30. Pola ini menunjukkan pembebanan awal yang kuat ketika dampaknya masih dapat terakumulasi sepanjang sebagian besar horizon, diikuti pengurangan bertahap ketika sisa horizon memendek.



Gambar 2. Profil kontrol optimal baseline untuk B=1

Sumber: hasil simulasi penulis.

5 Sensitivitas Bobot Biaya Kontrol

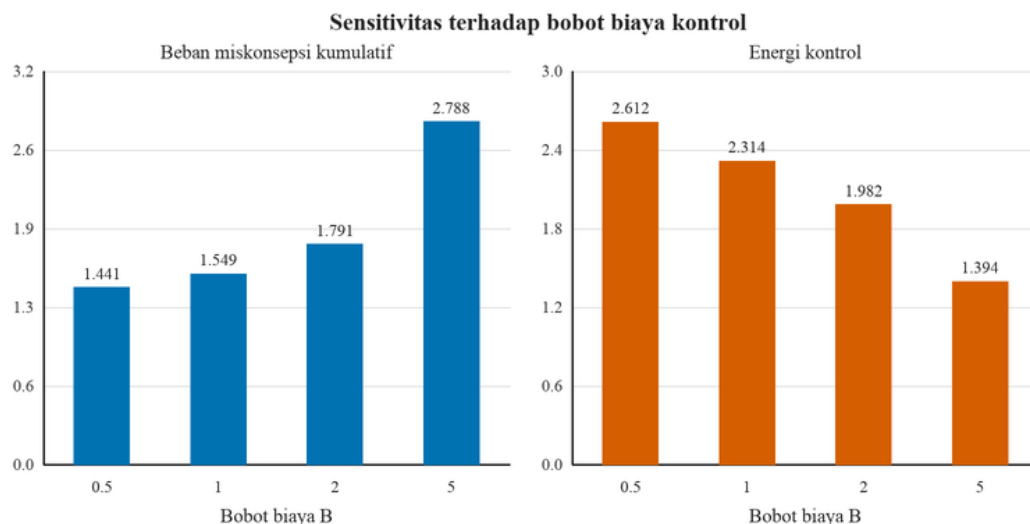
Tabel 6. Sensitivitas solusi optimal terhadap bobot B

B	Nilai objektif	Beban kumulatif	Intensitas kumulatif	Energi kontrol	m pada T	Keluar dari batas
0,5	2,0944	1,4414	13,7712	2,6121	0,003239	13,10
1	2,7064	1,5492	13,0092	2,3143	0,006371	9,50
2	3,7730	1,7912	12,1459	1,9817	0,012501	5,76
5	6,2736	2,7880	10,5372	1,3942	0,029985	Tidak menyentuh

Sumber: hasil simulasi dengan $A=1$. Nilai objektif antarbobot tidak mengukur fungsi yang identik karena B berubah.

Kenaikan B membuat kontrol relatif lebih mahal. Akibatnya, intensitas kumulatif dan energi kontrol turun, sedangkan beban miskonsepsi kumulatif dan nilai terminal meningkat. Untuk $B=0,5$, kontrol bertahan di dekat batas hingga waktu 13,10; untuk $B=2$, kontrol keluar dari batas pada waktu 5,76. Pada $B=5$, kontrol maksimum hanya 0,2802 dan tidak menyentuh batas atas.

Nilai objektif pada kolom kedua tidak boleh dibandingkan sebagai ukuran performa yang identik karena koefisien fungsi objektif berubah. Perbandingan yang informatif terletak pada arah trade-off: bobot biaya yang lebih besar mengurangi penggunaan kontrol dan menerima beban miskonsepsi yang lebih besar. Baseline $B=1$ menghasilkan arc jenuh awal sekitar 9,5 satuan waktu dan arc interior menurun selama sebagian besar horizon, sehingga menampilkan keseimbangan nontrivial antara kedua komponen biaya.



Gambar 3. Perubahan beban miskonsepsi dan energi kontrol terhadap B

Sumber: hasil simulasi penulis.

6 Implikasi Matematis dan Keterbatasan

Hasil utama bukan klaim bahwa suatu intervensi kelas harus diterapkan pada intensitas 0,30 selama 9,5 satuan waktu. Angka tersebut mengikuti skala, parameter, dan fungsi biaya yang diasumsikan. Implikasi matematisnya lebih sempit: ketika manfaat kontrol diukur melalui penurunan luas di bawah kurva miskonsepsi dan biaya kontrol tumbuh kuadratik, solusi cenderung memusatkan intensitas pada awal horizon lalu menurunkannya saat manfaat marjinal berkurang.

Model juga mengagregasi heterogenitas individu, materi, kualitas pengajaran, dan struktur jaringan interaksi ke dalam beberapa parameter konstan. Istilah β um mengasumsikan pencampuran homogen, sedangkan kontrol memengaruhi seluruh proporsi miskonsepsi dengan efisiensi yang sama. Tidak ada penundaan belajar, efek kejenuhan, ketidakpastian parameter, kendala sumber daya diskret, atau penalti terminal. Keterbatasan ini perlu dipertimbangkan sebelum model dihubungkan dengan data pendidikan.

Pengembangan berikutnya dapat mengestimasi parameter dari data longitudinal, menambahkan struktur usia-konsep atau jaringan kelas, menggunakan kontrol impulsif untuk jadwal intervensi diskret, dan memasukkan biaya terminal jika keadaan akhir merupakan sasaran kebijakan. Kalibrasi empiris juga harus menentukan satuan waktu dan makna operasional kontrol. Sampai langkah tersebut dilakukan, profil optimal berfungsi sebagai hasil teoretis-komputasional untuk menguji konsekuensi asumsi model.

KESIMPULAN

Masalah kontrol optimal pada model tiga keadaan menghasilkan karakterisasi kontrol terbatas yang dapat diselesaikan secara konsisten dalam formulasi dua dimensi. Untuk parameter asumsi $\alpha=0,20$, $\beta=0,75$, $\gamma=0,15$, $\delta=0,10$, kondisi awal $(0,50; 0,30; 0,20)$, $T=100$, dan $A=B=1$, kontrol optimal memberikan nilai objektif 2,7064. Nilai ini lebih rendah daripada tanpa kontrol serta kontrol konstan 0,10 dan 0,20. Strategi optimal menekan miskonsepsi sejak awal, berada dekat batas maksimum hingga waktu 9,50, lalu berkurang secara mulus menuju nol pada waktu terminal.

Dibandingkan kontrol konstan 0,20, kontrol optimal mengurangi beban miskonsepsi kumulatif 26,1% dan energi kontrol 42,1%. Hasil sensitivitas menunjukkan bahwa bobot biaya yang lebih besar menurunkan intensitas intervensi dan meningkatkan beban miskonsepsi, sesuai struktur fungsi objektif. Verifikasi konservasi, kesetaraan formulasi 2D–3D, residual proyeksi, dan pemurnian grid mendukung konsistensi numerik hasil.

Semua nilai parameter, bobot biaya, batas kontrol, dan kondisi awal masih berupa asumsi. Karena itu, kesimpulan penelitian terbatas pada implikasi matematis model. Validasi dengan data longitudinal diperlukan sebelum intensitas, waktu, atau bentuk intervensi ditafsirkan sebagai rekomendasi empiris dalam pembelajaran.

DAFTAR PUSTAKA

- Banerjee, S. (2021). *Mathematical modeling: Models, analysis and applications* (2nd ed.). CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781351022941>
- Bretti, G. (2021). Differential models, numerical simulations and applications. *Axioms*, 10(4), Article 260. <https://doi.org/10.3390/axioms10040260>
- Butcher, J. C. (2016). *Numerical methods for ordinary differential equations* (3rd ed.). John Wiley & Sons. <https://doi.org/10.1002/9781119121534>
- Castaldi, P., & Mimmo, N. (2024). Representing the dynamics of student learning and interactions with a university curriculum. *IFAC-PapersOnLine*, 58(16), 211–216. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2024.08.488>
- Christou, K. P. (2022). Multiplication always makes bigger? A case of learning with conceptual change in mathematics. *Psychology: The Journal of the Hellenic Psychological Society*, 27(1), 32–47. <https://doi.org/10.12681/psyhps.30685>
- El Bhih, A., Benfatah, Y., Hassouni, H., Balatif, O., & Rachik, M. (2024). Mathematical modeling, sensitivity analysis, and optimal control of students awareness in mathematics education. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 11, Article 100795. <https://doi.org/10.1016/j.padiff.2024.100795>
- Fleming, W. H., & Rishel, R. W. (1975). *Deterministic and stochastic optimal control*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6380-7>
- Kirk, D. E. (2004). *Optimal control theory: An introduction*. Dover Publications. <https://store.doverpublications.com/products/9780486434841>
- Lenhart, S., & Workman, J. T. (2007). *Optimal control applied to biological models*. Chapman & Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9781420011418>
- Li, F., Cohen, A. S., Bottge, B. A., & Templin, J. (2016). A latent transition analysis model for assessing change in cognitive skills. *Educational and Psychological Measurement*, 76(2), 181–204. <https://doi.org/10.1177/0013164415588946>
- Lozada, E., Guerrero-Ortiz, C., Coronel, A., & Medina, R. (2023). Proposal of a mathematical modelling activity to facilitate students' learning of ordinary differential equation concepts. *Sustainability*, 15(16), Article 12483. <https://doi.org/10.3390/su151612483>
- McAsey, M., Mou, L., & Han, W. (2012). Convergence of the forward-backward sweep method in optimal control. *Computational Optimization and Applications*, 53(1), 207–226. <https://doi.org/10.1007/s10589-011-9454-7>
- Mutiawati, Johar, R., Ramli, M., & Mailizar. (2022). Mathematical model of student learning behavior with the effect of learning motivation and student social interaction. *Journal on Mathematics Education*, 13(3), 415–436. <https://doi.org/10.22342/jme.v13i3.pp415-436>
- Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V., & Mishchenko, E. F. (1962). *The mathematical theory of optimal processes*. Interscience Publishers.
- Ridho, M. H., & Juandi, D. (2023). Systematic literature review: Identification of misconceptions in mathematics learning. *Jurnal Math Educator Nusantara: Wahana Publikasi Karya Tulis Ilmiah di Bidang Pendidikan Matematika*, 9(1), 77–94. <https://doi.org/10.29407/jmen.v9i1.19918>

- Rinne, L. F., Ye, A., & Jordan, N. C. (2017). Development of fraction comparison strategies: A latent transition analysis. *Developmental Psychology*, 53(4), 713–730. <https://doi.org/10.1037/dev0000275>
- Suh, J., Matson, K., Seshaiyer, P., Jamieson, S., & Tate, H. (2021). Mathematical modeling as a catalyst for equitable mathematics instruction: Preparing teachers and young learners with 21st century skills. *Mathematics*, 9(2), Article 162. <https://doi.org/10.3390/math9020162>
- Tenison, C., & Anderson, J. R. (2016). Modeling the distinct phases of skill acquisition. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 42(5), 749–767. <https://doi.org/10.1037/xlm0000204>
- Vitoria, L., Ramli, M., Johar, R., & Mawarpury, M. (2021). A review of mathematical modelling in educational research in Indonesia. *Journal of Physics: Conference Series*, 1882(1), Article 012145. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1882/1/012145>
- Vosniadou, S., & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction*, 14(5), 445–451. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.014>